

§3.1 空间向量基本定理

【学习目标】

1. 理解空间向量基本定理及其意义.
2. 会用基表示空间向量.

【重点难点】

重点: 理解空间向量基本定理及其意义.

难点: 会用基表示空间向量.

【导学流程】

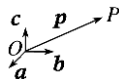
一、复习导入

回顾平面向量基本定理, 如果 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于该平面内的任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. 若 e_1, e_2 不共线, 我们把 $\{e_1, e_2\}$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组基. 类似地, 任意一个空间向量 p 能否用任意三个不共面的向量 a, b, c 表示呢?

二、探究新知

◇探究一 空间向量基本定理

问题 1 如图, 设 a, b, c 是空间中三个两两垂直的向量, 且表示它们的有向线段有公共起点 O , 对于任意一个空间向量 $p = \vec{OP}$, p 能否用 a, b, c 表示呢?



【知识梳理】

1. 空间向量基本定理: 如果 a, b, c 是空间三个不共面的向量, p 是空间任意一个向量, 那么存在_____的三元有序实数组 (x, y, z) , 使得 $p = xa + yb + zc$.
2. 我们把 $\{a, b, c\}$ 叫作空间的一组____, a, b, c 都叫作基向量.

注意点:

- (1) 空间任意三个不共面的向量都可构成空间的一个基. 基选定后, 空间的所有向量均可由基唯一表示; 不同基下, 同一向量的表达式也有可能不同.
- (2) 一组基是一个向量组, 一个基向量是指基中的某一个向量, 二者是相关联的不同概念.
- (3) 由于零向量与任意一个非零向量共线, 与任意两个不共线的非零向量共面, 所以若三个向量不共面, 就说明它们都不是零向量.

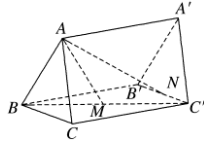
例 1 已知 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一组基, 且 $\vec{OA} = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\vec{OB} = -3e_1 + e_2 + 2e_3$, $\vec{OC} = e_1 + e_2 - e_3$, 试判断 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ 能否作为空间的一组基?

跟踪训练 1 (多选) 设 $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$, 且 $\{a, b, c\}$ 是空间的一组基, 则下列向量组中, 可以作为空间一组基的向量组有()

- A. $\{a, b, x\}$ B. $\{x, y, z\}$ C. $\{b, c, z\}$ D. $\{x, y, a+b+c\}$

◇探究二 用基向量表示空间向量

例 2 如图, 在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, 已知 $\overrightarrow{AA'}=a$, $\overrightarrow{AB}=b$, $\overrightarrow{AC}=c$, 点 M, N 分别是 BC' , $B'C'$ 的中点, 试用 a, b, c 表示向量 \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AN} .



延伸探究 若把本例中的 “ $\overrightarrow{AA'}=a$ ” 改为 “ $\overrightarrow{AC'}=a$ ”, 其他条件不变, 则结果是什么?

跟踪训练 2 已知矩形 $ABCD$, P 为平面 $ABCD$ 外一点, M, N 分别为 PC, PD 上的点, 且 $PM=2MC$, N 为 PD 的中点, 求满足 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$ 的实数 x, y, z 的值?

◇探究三 空间向量基本定理的综合应用

问题 2 对于不共线的三点 A, B, C 和平面 ABC 外的一点 O , 空间一点 P 满足关系式 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 则点 P 在平面 ABC 内的充要条件是什么?

例 3 (1)(多选) 对空间任一点 O 和不共线的三点 A, B, C , 能得到 P, A, B, C 四点共面的是()

- A. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ B. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
C. $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

跟踪训练 3 已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 求证: (1) E, F, G, H 四点共面;
(2) $BD \parallel$ 平面 $EFGH$.

三、随堂演练

1. 设 $p: a, b, c$ 是三个非零向量; $q: \{a, b, c\}$ 为空间的一组基, 则 p 是 q 的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 O, A, B, C 为空间不共面的四点, 且向量 $a=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 向量 $b=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-$

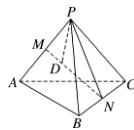
\vec{OC} , 则与 \vec{a}, \vec{b} 不能构成空间的一组基的是()

- A. \vec{OA} B. \vec{OB} C. \vec{OC} D. \vec{OA} 或 \vec{OB}

3. (多选)下列条件中, 使 M 与 A, B, C 一定共面的是()

- A. $\vec{OM} = 3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$ B. $\vec{OM} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$
C. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ D. $\vec{OM} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$

4. 如图, 在正四面体 $P-ABC$ 中, M, N 分别为 PA, BC 的中点, D 是线段 MN 上一点, 且 $ND = 2DM$, 若 $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}$, 则 $x+y+z$ 的值为_____.



四、课堂小结

1. 知识清单:

(1)空间向量基本定理. (2)用基向量表示空间向量. (3)四点共面的充要条件.

2. 方法归纳: 转化化归.

3. 常见误区:

(1)基向量理解错误, 没有注意到基向量的条件.

(2)运算错误, 利用基表示向量时计算要细心.

五、布置作业 (课时对点练)

基础巩固

1. (多选)若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间一组基, 则下列各组中能构成空间的一组基的是()

- A. $\{\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}\}$ B. $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$
C. $\{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}\}$ D. $\{\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{b} + 3\vec{c}, 3\vec{a} - 9\vec{c}\}$

2. (多选)给出下列命题, 其中是真命题的是()

- A. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 可以作为空间的一组基, \vec{d} 与 \vec{c} 共线, $\vec{d} \neq \vec{0}$, 则 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ 也可以作为空间的一组基
B. 已知向量 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 \vec{a}, \vec{b} 与任何向量都不能构成空间的一组基
C. 已知 A, B, M, N 是空间中的四点, 若 $\{\vec{BA}, \vec{BM}, \vec{BN}\}$ 不能构成空间的一组基, 则 A, B, M, N 四点共面

D. 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是两个不共线的向量，而 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} (\lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ 且 } \lambda\mu \neq 0)$ ，则 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 构成空间的一组基

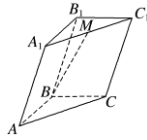
3. 在正四面体 $O-ABC$ 中， $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$ ， D 为 BC 的中点， E 为 AD 的中点，则用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 \vec{OE} 为()

- A. $\vec{OE} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$ B. $\vec{OE} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ C. $\vec{OE} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ D. $\vec{OE} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$

4. 对于空间任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C ，有如下关系： $6\vec{OP} = \vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}$ ，则()

- A. 四点 O, A, B, C 必共面 B. 四点 P, A, B, C 必共面
C. 四点 O, P, B, C 必共面 D. 五点 O, P, A, B, C 必共面

5. 如图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， M 为 A_1C_1 的中点，若 $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ， $\vec{BC} = \mathbf{b}$ ， $\vec{AA_1} = \mathbf{c}$ ，则 \vec{BM} 可表示为()



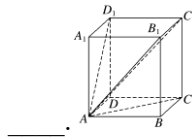
- A. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ B. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ C. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

6. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别在棱 BB_1, BC, BA 上，且满足 $\vec{BE} = \frac{3}{4}\vec{BB_1}$ ， $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ ， $\vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ ， O 是平面 B_1GF 、平面 ACE 与平面 B_1BDD_1 的一个公共点，

设 $\vec{BO} = x\vec{BG} + y\vec{BF} + z\vec{BE}$ ，则 $x+y+z$ 等于()

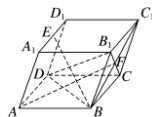
- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{7}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

7. 如图在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，用 $\{\vec{AC}, \vec{AB_1}, \vec{AD_1}\}$ 作为空间的一组基，则 $\vec{AC_1} =$



8. 已知 A, B, C 三点不共线， O 是平面 ABC 外的任意一点，若点 P 在平面 ABC 内，且 $\vec{OP} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} + m\vec{OC}$ ，则实数 $m =$ _____.

9. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ， $\vec{AD} = \mathbf{b}$ ， $\vec{AA_1} = \mathbf{c}$ ， E 为 A_1D_1 的中点， F 为 BC_1 与 B_1C 的交点.



(1)用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 $\vec{DB_1}, \vec{BE}, \vec{AF}$;

(2)化简 $\vec{DD_1} + \vec{DB} + \vec{CD}$, 并在图中标出化简结果.

10. 已知 ABC 三点不共线, 对平面 ABC 外的任一点 O , 若点 M 满足 $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$.

(1)判断 $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$ 三个向量是否共面;

(2)判断点 M 是否在平面 ABC 内.

综合运用

11. 如图 1, 点 M 为 OA 的中点, $\{\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD}\}$ 为空间的一组基, $\vec{DM} = x\vec{OA} + y\vec{OC} + z\vec{OD}$, 则有序实数组 $(x, y, z) =$ _____.

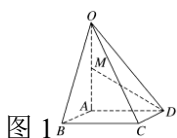


图 1

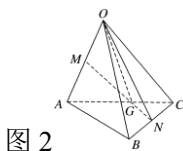


图 2

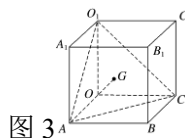


图 3

12. 若 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, 若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 不共面, 当 $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 时, $\alpha + \beta + \gamma =$ _____.

13. 如图 2, 已知空间四边形 $OABC$, M, N 分别是边 OA, BC 的中点, 点 G 在 MN 上, 且 $MG = 2GN$, 设 $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \mathbf{c}$, 则向量 $\vec{OG} =$ _____.(用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示)

14. 如图 3 所示, 在正方体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中, 点 G 为 $\triangle ACO_1$ 的重心, 若 $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OC} = \mathbf{b}$, $\vec{OO_1} = \mathbf{c}$, $\vec{OG} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, 则 $x + y + z =$ _____.

拓广探究

15. 已知四面体 $O-ABC$, G_1 是 $\triangle ABC$ 的重心, G 是 OG_1 上一点, 且 $OG = 3GG_1$, 若 $\vec{OG} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, 则 (x, y, z) 为()

A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

B. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

D. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 点 M 在 PG 上, 且 $PM = 3MG$, 过点 M 任意作一个平面分别交线段 PA, PB, PC 于点 D, E, F , 若 $\vec{PD} = m\vec{PA}$, $\vec{PE} = n\vec{PB}$, $\vec{PF} = t\vec{PC}$, 求证: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}$ 为定值, 并求出该定值.

